**INSTYTUT MATEMATYKI I KRYPTOLOGII**
**WYDZIAŁ CYBERNETYKI**
**WAT**

# ZADANIA KONKURSOWE

---

## MATEMATYKA

**PRZYGOTOWALI**

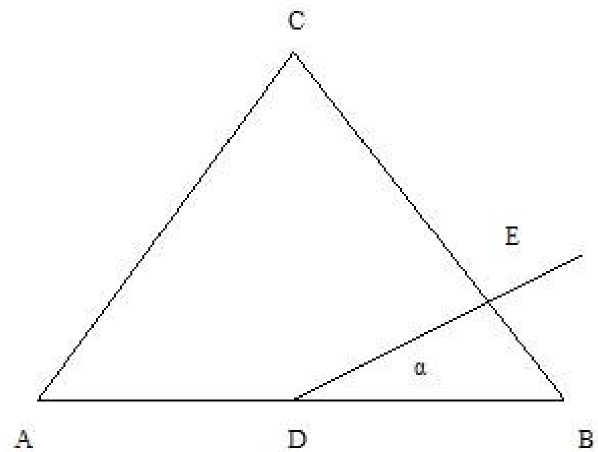
JERZY GAWINECKI, LUCJAN KOWALSKI, WOJCIECH MATUSZEWSKI

**WARSZAWA 2012**

**Zadanie 1**

Przez środek boku trójkąta równobocznego $ABC$ poprowadzono prostą tworzącą z tym bokiem kąt ostry $\alpha$. Wyrazić stosunek pól figur na jakie ta prosta dzieli trójkąt $ABC$ jako funkcję kąta $\alpha$.

Szkic rozwiązania.




Oznaczmy:

$a$ - długość boku trójkąta $ABC$,

Pole trójkąta $ABC$:

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta $DBE$:

$$S_{DBE} = \frac{1}{2}\cdot|DB|\cdot|DE|\cdot\sin\alpha = \frac{a}{4}\cdot|DE|\cdot\sin\alpha \qquad (1)$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta $DBE$:

$$\frac{|DE|}{\sin 60^O} = \frac{|DB|}{\sin(180^O - 60^O - \alpha)}$$

Stąd

$$|DE| = \frac{|DB|\cdot\sin 60^O}{\sin(120^O - \alpha)} = \frac{a\sqrt{3}}{4\sin(120^O - \alpha)} \qquad (2)$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymamy

$$S_{DBE} = \frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{16\sin(120^O - \alpha)}$$

Pole czworokąta *ADEC*:

$$S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{DBE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - S_{DBE}$$

Zatem

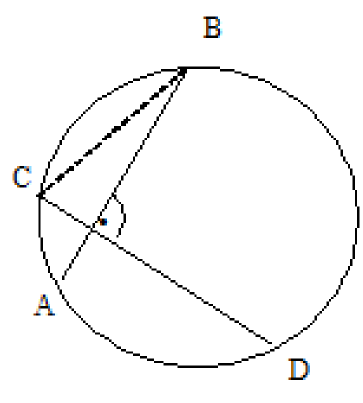
$$\frac{S_{ADEC}}{S_{DBE}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - S_{DBE}}{S_{DBE}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16\sin(120^O - \alpha)}{a^2\sqrt{3}\sin\alpha} - 1 = \frac{4\sin(120^O - \alpha)}{\sin\alpha} - 1$$

Odp. Szukany stosunek pól ma wartość $\frac{S_{ADEC}}{S_{DBE}} = \frac{4\sin(120^O - \alpha)}{\sin\alpha} - 1$.

**Zadanie 2**

W okręgu o promieniu 1 poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i CD.
Wykazać, że $|AC|^2 + |BD|^2 = 4$.

Szkic rozwiązania.




Niech $|\angle ABC| = \alpha$,

wtedy $|\angle BCD| = 90^o - \alpha$

Stosujemy twierdzenie sinusów

$|AC| = 2\sin\alpha$

$|BD| = 2\sin(90^o - \alpha) = 2\cos\alpha$,

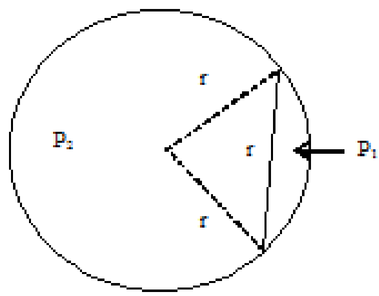
zatem

$|AC|^2 + |BD|^2 = (2\sin\alpha)^2 + (2\cos\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4$

**Zadanie 3**

Cięciwa o długości równej promieniowi koła dzieli to koło na dwie części.
Jaki jest stosunek pola większej części figury do mniejszej?

Szkic rozwiązania.
*r* – promień koła,




$P_1 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2$ (pole wycinka minus pole trójkąta równobocznego),

$P_2 = \pi r^2 - P_1$

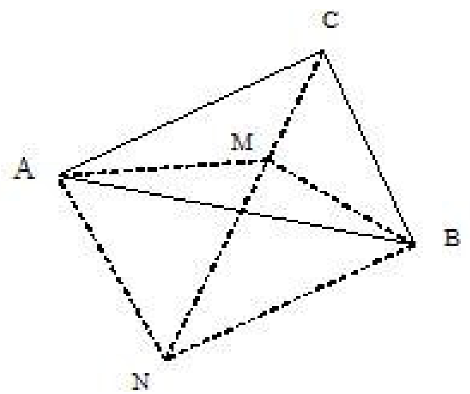
$$k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\pi r^2 - P_1}{P_1} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2} - 1 = \frac{12\pi}{2\pi - 3\sqrt{3}} - 1,$$

Odp. Szukany stosunek pól ma wartość $k = \frac{12\pi}{2\pi - 3\sqrt{3}} - 1$.

**Zadanie 4**

Dany jest trójkąt ABC o polu równym 1. Z wierzchołka B opuszczamy prostopadły odcinek BM na dwusieczną kąta C. Oblicz pole trójkąta AMC.

Szkic rozwiązania.




Przez punkt B prowadzimy równoległą do prostej AC do przecięcia z dwusieczną kąta C, punkt przecięcia oznaczamy przez N.
Zatem $|\angle BNC| = |\angle ACN| = |\angle BCN|$

Trójkąt BCN jest równoramienny, stąd MB jest środkową, zatem:
P∆AMC = 0,5 P∆ANC = 0,5 P∆ABC = 0,5.

II sposób

$$P\Delta AMC = \frac{1}{2}|AC|\cdot|CM|\cdot\sin\left|\angle\frac{C}{2}\right|$$

lecz

$$|CM| = \cos\left|\angle\frac{C}{2}\right|$$

stąd

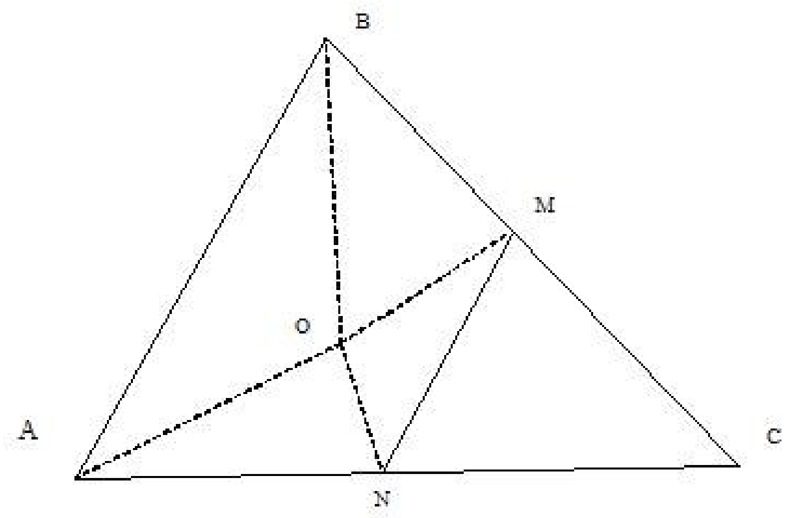
$$P\Delta AMC = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\left|\angle\frac{C}{2}\right|\cdot\cos\left|\angle\frac{C}{2}\right| = \frac{1}{4}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin|\angle C| = \frac{1}{2}P\Delta ABC = \frac{1}{2}$$

Odp. Pole trójkąta AMC jest równe 0,5.

**Zadanie 5**

W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AC .
Wiadomo, że kąt AON jest prosty. Udowodnij, że kąt BOM też jest prosty.

Szkic rozwiązania.




MN||AB $\qquad |\angle BAO| = |\angle OAN|$

$|\angle BAN| + |\angle MNA| = 180^o$

$\frac{1}{2}|\angle BAN| + \frac{1}{2}|\angle MNA| = 90^o$

Z założenia $\frac{1}{2}|\angle BAN| + \frac{1}{2}|\angle ONA| = 90^o = |\angle AON|$

Stąd $\frac{1}{2}|\angle MNA| = |\angle ONA|$

czyli punkt O leży na dwusiecznej kąta MNA, zatem okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do MN.

Z drugiej strony

$|\angle ABM| + |\angle BMN| = 180^o$

stąd

$\frac{1}{2}|\angle ABM| + \frac{1}{2}|\angle BMN| = 90^o$

oraz

$|\angle OBM| + |\angle BMO| = \frac{1}{2}|\angle ABM| + \frac{1}{2}|\angle BMN|$

stąd

$|\angle OBM| + |\angle BMO| = 90^o$

zatem

$|\angle BOM| = 180^o - (|\angle OBM| + |\angle BMO|) = 90^o$

**Zadanie 6**

Wyznacz zbiór środków cięciw paraboli $y = 3x^2$ przechodzących przez punkt $P = (0,2)$.

Szkic rozwiązania.

Każda cięciwa paraboli przechodząca przez punkt $P$ ma równanie

$$y = ax + 2 \quad \text{gdzie} \quad a \in R$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = ax + 2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

otrzymujemy punkty wspólne cięciwy z parabolą:

$$\left( \frac{a - \sqrt{a^2 + 24}}{6}, \frac{a^2 - a\sqrt{a^2 + 24} + 12}{6} \right) \quad \text{oraz} \quad \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + 24}}{6}, \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 24} + 12}{6} \right)$$

Środek cięciwy ma więc współrzędne

$$\left( \frac{a}{6}, \frac{a^2 + 12}{6} \right)$$

Ponieważ

$$\frac{a^2 + 12}{6} = \frac{a^2}{6} + 2 = 6 \cdot \left( \frac{a}{6} \right)^2 + 2$$

więc szukanym zbiorem jest parabola o równaniu

$$y = 6x^2 + 2$$

**Zadanie 7**

Pierwiastek trójmianu $ax^2 + ax + b$ pomnożono przez pierwiastek trójmianu $ax^2 + bx + b$ i otrzymano 1. Wyznaczyć te pierwiastki.

Szkic rozwiązania.

Niech $y$ i $z = \frac{1}{y}$ będą tymi pierwiastkami,

$y \neq 0$ z założenia.

Wtedy

$$ay^2 + ay + b = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + b = 0$$

stąd

$$ay^2 + ay + b = 0 \qquad \text{i} \qquad by^2 + by + a = 0$$

Dodając te równania stronami otrzymujemy

$(a+b)y^2+(a+b)y+a+b=0$

$(a+b)(y^2+y+1)=0$

Ponieważ drugi czynnik jest zawsze dodatni, to

$a+b=0$ czyli $b=-a$

Po podstawieniu do pierwszego równania mamy

$a(y^2+y-1)=0$

Stąd $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $z=\frac{1}{y}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Odp. Szukane pierwiastki to $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

**Zadanie 8**

Rozwiąż równanie $x^{x^3}=3$.

Szkic rozwiązania.

Podstawiając $y=x^3$,

otrzymamy równanie $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^y=3$

czyli

$y^{\frac{1}{3}y}=3$

stąd $y^y=3^3$

zatem $y=3$

co oznacza, że $x=\sqrt[3]{3}$

Odp. Szukane rozwiązanie to $x=\sqrt[3]{3}$.

**Zadanie 9**

Rozwiąż równanie

$$(x+1)^{63}+(x+1)^{62}(x-1)+(x+1)^{61}(x-1)^2+....+(x-1)^{63}=0.$$

Szkic rozwiązania.

Mnożymy obie strony przez $(x+1)-(x-1)=2$

Wtedy rozpatrywane równanie ma postać

$$(x+1)^{64}-(x-1)4=0$$

Co jest równoważne

$$|x+1| = |x-1|$$

Zatem jedynym rozwiązaniem jest x = 0.

Odp. Szukane rozwiązanie to $x = 0$.

**Zadanie 10**
Rozwiąż nierówność

$$\log_{\log_x 0,5} 4 + \log_{0,5} \log_x 0,5 + 1 \le 0 .$$

Szkic rozwiązania.
Założenia

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ \log_x 0,5 > 0 \\ \log_x 0,5 \ne 1 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \\ 0 < x < 1 \\ x \ne 0,5 \end{cases}$$

Zatem $\quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Korzystając ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu mamy

$$\log_{\log_x 0,5} 4 = \frac{2}{\log_2 \log_x 0,5}$$

$$\log_{0,5} \log_x 0,5 = -\log_2 \log_x 0,5$$

i rozpatrywana nierówność ma postać

$$\frac{2}{\log_2 \log_x 0,5} - \log_2 \log_x 0,5 + 1 \le 0$$

Podstawiając $\log_2 \log_x 0,5 = t$ otrzymamy

$$\frac{2}{t} - t + 1 \le 0$$

czyli $\quad \dfrac{(t-2)(t+1)}{t} \ge 0$

stąd $t \in [-1,0) \cup [2, \infty)$

Rozpatrujemy dwa przypadki

$$-1 \le \log_2 \log_x 0,5 < 0$$

lub

$$2 \le \log_2 \log_x 0,5$$

czyli równoważnie

$x \in [0{,}25; 0{,}5)$

lub

$x \in \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1\right)$

Uwzględniając założenia mamy ostatecznie $x \in [0{,}25; 0{,}5) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1\right)$.

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $[0{,}25; 0{,}5) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1\right)$.

**Zadanie 11**

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4|x-y| + 7 = 0 \\ xy = -2 \end{cases}.$$

Szkic rozwiązania.

Uwzględniając drugie równanie mamy

$$|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 4$$

Zatem pierwsze równanie możemy zapisać jako równanie kwadratowe względem $|x-y|$:

$$|x-y|^2 - 4|x-y| + 3 = 0$$

stąd

$|x-y| = 1$ lub $|x-y| = 3$

Rozpatrując cztery przypadki

(1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x - y = -3 \\ xy = -2 \end{cases}$

Otrzymujemy cztery rozwiązania (układy (1) i (2) są sprzeczne):

$(3)_1 \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \qquad (3)_2 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

$(4)_1 \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad (4)_2 \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Odp. Równanie ma cztery rozwiązania (2, -1); (1, -2); (-2,1); (-1,2).

**Zadanie 12**

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y + x^2 + y^2 = 42 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania.

Równanie drugie zapisujemy w postaci

$$x + y + (x + y)^2 - 2xy = 42$$

Podstawiamy $xy = 15$ i oznaczmy $x + y = a$. Otrzymamy równanie:

$$a^2 + a - 72 = 0\,,$$

które ma dwa pierwiastki:

$$a_1 = -9,\ \ a_2 = 8\,.$$

Zatem:

$$\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = -9 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Rozwiązując te układy równań otrzymamy cztery rozwiązania zadania:

$$x = (-9 - \sqrt{21})/2, \quad y = (-9 + \sqrt{21})/2$$

$$x = (-9 + \sqrt{21})/2, \quad y = (-9 - \sqrt{21})/2$$

$$x = 3, \quad y = 5$$

$$x = 5, \quad y = 3$$

**Zadanie 13**

Podaj wszystkie pary liczb całkowitych $(x, y)$ spełniające układ nierówności

$$\begin{cases} y - \left|x^2 - 2x\right| \geq 0 \\ y + |x - 1| \leq 2 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania.

Z pierwszej nierówności

$$y \geq |x^2 - 2x|$$

zatem

$$y \geq 0.$$

Z drugiej nierówności

$$y \leq 2.$$

Są więc 3 możliwości:

$$y = 0 \quad \text{lub} \quad y = 1 \quad \text{lub} \quad y = 2.$$

Jeżeli $y = 0$, to

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| = 0 \\ |x-1| \leq 2 \end{cases},$$

Równanie jest spełnione przez liczby całkowite: 0 i 2. Łatwo sprawdzić, że te liczby spełniają też nierówność.
Jeżeli $y = 1$, to

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| \leq 1 \\ |x-1| \leq 1 \end{cases}$$

Druga nierówność jest spełniona przez trzy liczby całkowite: 0, 1 i 2. Łatwo sprawdzić, że te liczby spełniają też pierwszą nierówność.
Jeżeli $y = 2$, to

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| \leq 2 \\ |x-1| = 0 \end{cases}$$

Równanie jest spełnione przez liczbę 1. Łatwo sprawdzić, że ta liczba spełnia też nierówność.
Zatem jest 6 par spełniających warunki zadania: (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,0) i (2,1).

**Zadanie 14**
Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & x \geq 0 \\ 4 + x & x < 0 \end{cases}$$

Niech $g(x) = |f(f(x))|$.
Wykonaj wykres funkcji $g(x)$.
Jakie rozwiązania ma równanie $g(x) = 0$?

Szkic rozwiązania.
Zauważmy, że

$$f(x) = 4 - |x|$$

stąd

$$g(x) = |4 - |4 - |x|||$$

Wykonując kolejno wykresy funkcji

a) $g_1(x) = |x|$

b) $g_2(x) = -|x|$

c) $g_3(x) = 4 - |x|$

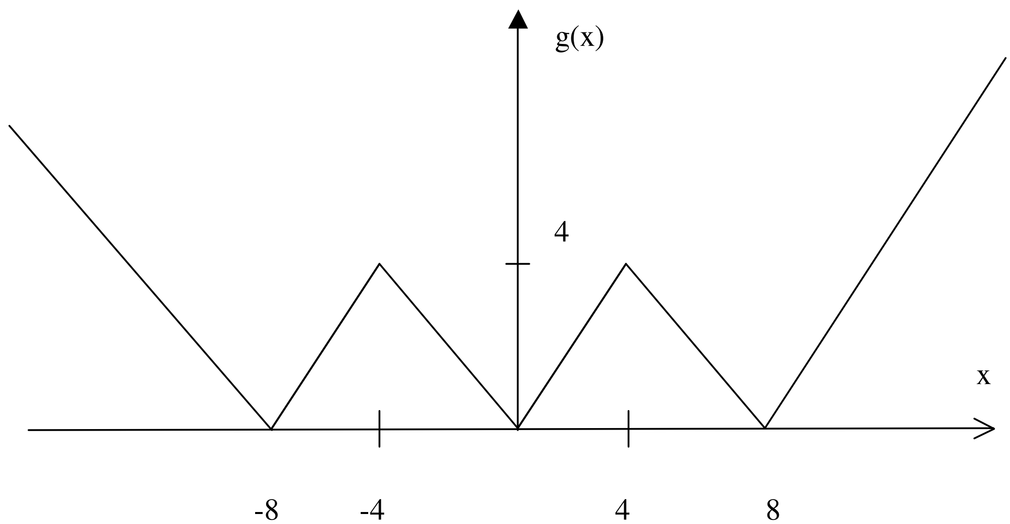
d) $g_4(x) = |4 - |x||$

e) $g_5(x) = -|4 - |x||$

f) $g_6(x) = 4 - |4 - |x||$

g) $g_7(x) = |4 - |4 - |x|||$

otrzymamy wykres




Rozwiązaniem równania $g(x) = 0$ są miejsca zerowe tej funkcji, tzn.
$x_1 = -8; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 8$.

**Zadanie 15**

Dana jest taka funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Udowodnij, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Szkic rozwiązania.
Jeśli równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiązań, to oznacza, że parabola będąca wykresem funkcji $y = f(x)$ leży powyżej lub poniżej prostej $y = x$.

Pokażemy, że wtedy również wykres funkcji $y = f(f(x))$ leży powyżej lub poniżej prostej $y = x$ co oznacza, że równanie $f(f(x)) = x$ nie ma rozwiązań.
Niech dla każdego $x$ zachodzi $f(x) > x$ ($y = f(x)$ leży powyżej prostej $y = x$).
Podstawiając do tej nierówności $f(x)$ zamiast $x$ otrzymamy

$$f(f(x)) > f(x) > x$$

Co z przechodniości relacji nierówności daje

$$f(f(x)) > x$$

i oznacza, że wykres funkcji $y = f(f(x))$ leży powyżej prostej $y = x$.
Analogicznie można rozpatrzeć drugi przypadek.

**Zadanie 16**
Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$

Dla jakich $x$ jest spełniona nierówność

$$f(f(x)) \geq f(x)$$

Szkic rozwiązania.

$$f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{2-x}, \qquad x \neq 2$$

Trzeba więc rozwiązać nierówność

$$\frac{x-1}{2-x} \geq \frac{1}{x-1}$$

równoważną nierówności

$$\frac{x^2 - x - 1}{(2-x)(x-1)} \geq 0$$

Stąd dostaniemy odpowiedź:

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};1\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right)$$

**Zadanie 17**
W ciągu geometrycznym suma wyrazów pierwszego i drugiego wynosi 108 a suma wyrazów drugiego i trzeciego 135. Wyznacz trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

Szkic rozwiązania.
q – iloraz
$a_1$ –pierwszy wyraz ciągu
Musi być spełniony układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q = 108 \\ a_1 q + a_1 q^2 = 135 \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 108 \\ a_1 q(1+q) = 135 \end{cases}$$

stąd

$q = \frac{5}{4}$;  $a_1 = 48$

oraz $a_2 = 60$;  $a_3 = 75$

Odp. Trzy początkowe wyrazy ciągu to: 48, 60, 75.

**Zadanie 18**

Dla jakich *m* liczby *x*, *y*, *z* spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = m + 4 \\ 2x - y + 2z = 2m + 2 \\ 3x + 2y - 3z = 1 - 2m \end{cases}$$

tworzą ciąg geometryczny?

Szkic rozwiązania.

Obie strony równania pierwszego mnożymy przez $-2$ i dodajemy otrzymane równanie do równania drugiego. Otrzymujemy:

$$y = 2.$$

Wstawiając $y = 2$ do równań pierwszego i trzeciego otrzymamy:

$$x = \frac{m+3}{6}, \quad z = \frac{5m+9}{6}.$$

Aby liczby *x*, *y*, *z* tworzyły ciąg geometryczny musi być

$$xz = y^2$$

czyli

$$5m^2 + 24m + 27 = 144$$

Stąd dostajemy odpowiedź: $m = -7{,}8$ lub $m = 3$.

**Zadanie 19**

Logarytmy dziesiętne trzech liczb tworzą ciąg arytmetyczny rosnący. Suma odwrotności tych liczb jest równa 39, a suma kwadratów ich odwrotności jest równa 819. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy szukane liczby: *x*, *y*, *z*.

Z warunków zadania wynika układ równań:

$$\begin{cases} \log y = (\log x + \log z)/2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 39 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 819 \end{cases}$$

Niech $a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y},\ c = \frac{1}{z}$. Wtedy:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a + b + c = 39 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 819 \end{cases}$$

Stąd

$$a = 3,\ b = 9,\ c = 27 \quad \text{lub} \quad a = 27\ b = 9,\ c = 3$$

a w konsekwencji

$$x = 1/3,\ y = 1/9,\ z = 1/27 \quad \text{lub} \quad x = 1/27,\ y = 1/9,\ z = 1/3$$

Ciąg $x$, $y$, $z$ ma być rosnący, zatem odpowiedź:

$$x = 1/27,\ y = 1/9,\ z = 1/3$$

**Zadanie 20**

Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n$ dla których liczba $n^3 + 1$ jest potęgą liczby 3. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.

Szkic rozwiązania.

Szukamy liczb naturalnych $n$ spełniających równość

$$n^3 + 1 = 3^k$$

dla pewnej liczby naturalnej $k$.

lecz

$$n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$$

zatem

$$n + 1 = 3^r;\quad n^2 - n + 1 = 3^s \qquad r, s \in N.$$

Stąd $n$ nie dzieli się przez 3 (bo daje resztę 1).

Zauważmy, że

$$3n = (n+1)^2 - (n^2 - n + 1) = 3^{2r} - 3^s$$

stąd

$$n = 3^{2r-1} - 3^{s-1}$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy s = 1 (bo $n$ nie dzieli się przez 3)

zatem

$$n^2 - n + 1 = 3$$

czyli $n^2 - n - 2 = 0$

stąd

$n_1 = 2; \quad n_2 = -1$

Drugi pierwiastek odrzucamy, bo nie jest liczbą naturalną.

Odp. Tylko liczba 2 spełnia przedstawiony warunek.

**Zadanie 21**

Gdy w pewnej liczbie naturalnej zmieniono kolejność cyfr to otrzymano liczbę trzy razy mniejszą od danej liczby.

Udowodnić, że tak otrzymana liczba dzieli się przez 27.

Szkic rozwiązania.

a – dana liczba,

$\underline{a}$ – liczba uzyskana po przestawieniu cyfr,

Zatem

(*) $\quad a = 3\underline{a}$

czyli a jest podzielna przez 3, stąd suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

Ponieważ przestawianie cyfr nie zmienia ich sumy, to liczba $\underline{a}$ też jest podzielna przez 3, czyli można ją przedstawić w postaci

$$\underline{a} = 3n$$

gdzie *n* jest pewną liczbą naturalną

i po podstawieniu do (*) otrzymamy

$$a = 3(3n) = 9n$$

co oznacza, że a jest podzielna przez 9.

Zatem suma jej cyfr jest podzielna przez 9 i liczba $\underline{a}$ też jest podzielna przez 9, czyli można ją przedstawić w postaci

$$\underline{a} = 9m$$

gdzie *m* jest pewną liczbą naturalną

i po podstawieniu do (*) otrzymamy

$$a = 3(9m) = 27m$$

co oznacza, że a jest podzielna przez 27.

Co należało wykazać.

**Zadanie 22**

Wyznacz takie liczby naturalne *x*, *y*, że $x^2 + x + 1$ jest potęgą liczby *y* o wykładniku naturalnym, oraz $y^2 + y + 1$ jest potęgą liczby *x* o wykładniku naturalnym.

Szkic rozwiązania.

1) Jeśli $x = y$ to $x^2 + x + 1 = x^n$
   zatem prawa strona dzieli się przez *x* więc i lewa strona powinna dzielić się przez *x*.
   Jest to możliwe tylko dla $x = 1$, lecz to prowadzi do sprzeczności $3 = 1$.

2) Jeśli $x \neq y$ to możemy założyć, że y < x.
   Wtedy $x^2 > y^2 + y + 1$, stąd $x$ może być tylko w pierwszej potędze, tzn. $y^2 + y + 1 = x$, wtedy
   $\left(y^2 + y + 1\right)^2 + \left(y^2 + y + 1\right) + 1 = y^m$
   stąd
   $y^4 + 2y^3 + y^2 + 3y + 3 = y^m$
   Prawa strona dzieli się przez $y$ więc i lewa strona powinna dzielić się przez $y$.
   Zatem $y$ jest dzielnikiem liczby 3, lecz ani $y$ = 3, ani $y$ = 1 nie spełnia tej równości.

Odp. Żadna para liczb naturalnych nie spełnia warunków zadania.

**Zadanie 23**

Podaj wszystkie pary liczb całkowitych $(x, y)$ spełniające równanie

$$(x + y - 2)(x - y - 2) - 5 = 0$$

Szkic rozwiązania.
Mamy:

$$(x + y - 2)(x - y - 2) = 5$$

Oba czynniki są liczbami całkowitymi, więc są 4 możliwości:

$$\begin{cases} x + y - 2 = -1 \\ x - y - 2 = -5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y - 2 = -5 \\ x - y - 2 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y - 2 = 1 \\ x - y - 2 = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y - 2 = 5 \\ x - y - 2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższe układy równań otrzymamy odpowiedź. Szukane pary to $(-1, 2),\ (-1, -2),\ (3, 0),\ (3, 4)$.

**Zadanie 24**

Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 2700, a ich największy wspólny dzielnik to 6. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy szukane liczby: $x$ oraz $y$.
Zapiszmy:

$$x = 6m, \quad y = 6n \quad \text{gdzie} \quad m, n \in N$$

Zatem

$$6m \cdot 6n = 2700$$

Stąd

$$m \cdot n = 75$$

Jest 6 możliwości:

$$m = 1,\ n = 75 \quad \text{lub} \quad m = 3,\ n = 25 \quad \text{lub} \quad m = 5,\ n = 15 \quad \text{lub}$$
$$m = 15,\ n = 5 \quad \text{lub} \quad m = 25,\ n = 3 \quad \text{lub} \quad m = 75,\ n = 1$$

Liczby $m$ oraz $n$ nie mogą mieć wspólnego dzielnika większego niż 1, gdyż wtedy liczby $x$ oraz $y$ miałyby wspólny dzielnik większy niż 6. Zatem przypadki

$$m = 5,\ n = 15 \quad \text{oraz} \quad m = 15,\ n = 5$$

odpadają. Z pozostałych przypadków wynika, że szukane liczby to 6 i 450 lub 28 i 150.

**Zadanie 25**

Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 504, a największy wspólny dzielnik tych liczb to 36. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy szukane liczby: $x$ oraz $y$.
Zapiszmy:

$$x = 36m, \quad y = 36n \quad \text{gdzie} \quad m, n \in N$$

Zatem

$$36m + 36n = 504$$

Stąd

$$m + n = 14$$

Liczby $m$ oraz $n$ nie mogą mieć wspólnego dzielnika większego niż 1, gdyż wtedy liczby $x$ oraz $y$ miałyby wspólny dzielnik większy niż 36. Zatem możliwe przypadki to:

$$m = 1,\ n = 13 \quad \text{lub} \quad m = 3,\ n = 11 \quad \text{lub} \quad m = 5,\ n = 9 \quad \text{lub}$$

$$m = 9,\ n = 5 \quad \text{lub} \quad m = 11,\ n = 3 \quad \text{lub} \quad m = 13,\ n = 1$$

Stąd znajdujemy 3 pary liczb spełniających warunki zadania:
36 i 468 lub 108 i 396 lub 180 i 324.

**Zadanie 26**

Iloczyn trzech liczb pierwszych jest 5 razy większy od sumy tych liczb. Co to za liczby?

Szkic rozwiązania.
Oznaczmy szukane liczby: $x$, $y$ oraz $z$.
Zatem

$$xyz = 5(x + y + z)$$

Prawa strona równania jest podzielna przez 5, więc lewa też. Jest ona iloczynem liczb pierwszych, więc jedna z liczb $x$, $y$, $z$ jest równa 5. Załóżmy, że $x = 5$. Wtedy:

$$5yz = 5(5 + y + z)$$

Z tego równania wyznaczamy $y$:

$$y = 1 + \frac{6}{z - 1}$$

$\frac{6}{z-1}$ musi być liczbą pierwszą, zatem

$$z = 2 \quad \text{lub} \quad z = 3 \quad \text{lub} \quad z = 7$$

Jeżeli $z = 2$, to $y = 7$, jeżeli $z = 3$, to $y = 4$ - to nie jest liczba pierwsza, a jeżeli $z = 7$, to $y = 2$.

Odpowiedź: Te liczby to 2, 5 i 7.

**Zadanie 27**

Okno ma kształt prostokąta na którego górnej podstawie dobudowano półkole. Obwód okna wynosi 5m. Jaka powinna być szerokość okna, by jego powierzchnia była największa?

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy:

$x$ - szerokość okna,

$y$ - wysokość części prostokątnej.

Zatem:

$$x + 2y + \pi x / 2 = 5 \qquad (1)$$

Powierzchnia okna

$$P = xy + \pi x^2 / 8 \qquad (2)$$

przy czym $x \in (0; 10/(2+\pi))$.

Wyznaczając z (1) $y$ i wstawiając do (2) dostaniemy:

$$P = \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{5}{2}x$$

Największa wartość pola $P$ jest przyjmowana dla $x = 10/(4+\pi)$.

**Zadanie 28**

Dysponujemy taką liczbą jednakowych monet, że można nimi wszystkimi wypełnić trójkąt równoboczny lub kwadrat. Liczba monet w boku kwadratu jest o 14 mniejsza niż liczba monet w boku trójkąta. Iloma monetami dysponujemy?

Szkic rozwiązania.

W trójkącie:

w pierwszym rzędzie jest 1 moneta

w drugim rzędzie są 2 monety

.............................................

w ostatnim *k*-tym rzędzie jest *k* monet.

Łączna liczba monet:

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Oznaczmy liczbę rzędów w kwadracie literą *n*. Liczba monet w kwadracie to $n^2$.

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} n = k - 14 \\ n^2 = \dfrac{k(k+1)}{2} \end{cases}$$

Ten układ ma 2 rozwiązania:

$$k = 8,\ n = -6 \quad \text{lub} \quad k = 49,\ n = 35$$

Liczba monet nie może być ujemna, zatem $k = 49,\ n = 35$.

Stąd obliczamy, że monet jest 1225.

**Zadanie 29**

Przejazd łódką 20 km w dół rzeki i z powrotem trwał 7 godzin. Równocześnie z łódką z tego samego miejsca wypłynęła tratwa, którą spotkano w drodze powrotnej w odległości 12 km od miejsca wyruszenia. Oblicz prędkość wody.

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy:

$x$ - prędkość wody w km/h,

$y$ - prędkość łódki względem płynącej wody.

Wówczas:

$x + y$ - prędkość łódki gdy płynie z prądem,

$y - x$ - prędkość łódki gdy płynie pod prąd.

Czas płynięcia łódką w dół rzeki: $\dfrac{20}{x+y}$.

Czas płynięcia łódką 20 km w górę rzeki: $\dfrac{20}{y-x}$.

Czas płynięcia łódką 8 km w górę rzeki: $\dfrac{8}{y-x}$.

Czas płynięcia 12 km tratwą: $\dfrac{12}{x}$.

Zatem:

$$\begin{cases} \dfrac{20}{x+y} + \dfrac{20}{y-x} = 7 \\ \dfrac{20}{x+y} + \dfrac{8}{y-x} = \dfrac{12}{x} \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy: $x = 3,\ y = 7$.

Prędkość wody wynosi 3 km/h.

**Zadanie 30**

Na drodze 36m przednie koło ciągnika wykonało o 6 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła zwiększyć o 1m, to na tej samej drodze przednie koło wykonałoby o 3 obroty więcej niż koło tylne. Oblicz obwody kół.

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy:

$x$ - obwód przedniego koła,

$y$ - obwód tylnego koła ($y > x$).

Z warunków zadania mamy:

$$\begin{cases} \frac{36}{x} = \frac{36}{y} + 6 \\ \frac{36}{x+1} = \frac{36}{y+1} + 3 \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} xy + 6x - 6y = 0 \\ xy + 13x - 11y + 1 = 0 \end{cases}$$

Odejmując od równania pierwszego równanie drugie otrzymamy:

$$y = 1{,}4x + 0{,}2$$

Podstawiając wyznaczony y do równania pierwszego (w ostatnim układzie) dostajemy:

$$7x^2 - 11x - 6 = 0$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest $-3/7$. Ten pierwiastek odrzucamy (obwód koła nie może być liczbą ujemną). Drugim pierwiastkiem jest $x = 2$. Wtedy $y = 3$. Są to obwody kół w metrach.

## ZADANIA Z KONKURSU 2009-2010

# ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Ile wynosi odległość początku układu współrzędnych od prostej

$$y = \frac{3}{4}x + 5 \qquad ?$$

**I** 3 **II** 4 **III** 5 **IV** 8

2. Który z poniższych wzorów jest prawdziwy dla dowolnych zdarzeń losowych $A$ i $B$ ?

**I** $P(A \cup B) \neq P(A)$

**II** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**III** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**IV** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

3. W ciągu $(a_n)$ wyraz $a_n$ wynosi $\frac{2n+1}{3n+4}$. Ile wynosi wyraz $a_{n-1}$ dla $n > 1$ ?

**I** $\frac{2n-1}{3n+1}$ **II** $\frac{2n}{3n+3}$ **III** $\frac{-n-3}{3n+4}$ **IV** $\frac{2n}{3n+4}$

4. Dane są równania dwóch okręgów

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad (x-3)^2 + (y-4)^2 = 3$$

Jakie jest wzajemne położenie tych okręgów ?

**I** Okręgi są styczne zewnętrznie

**II** Okręgi przecinają się w dwóch punktach

**III** Okręgi nie mają punktów wspólnych

**IV** Okręgi są styczne wewnętrznie

5. Kula o promieniu R ma tę samą objętość, co sześcian o przekątnej $\sqrt{3}$. Ile wynosi R ?

**I** $\sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}}$ **II** $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ **III** $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$ **IV** $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$

6. Dany jest ciąg geometryczny $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

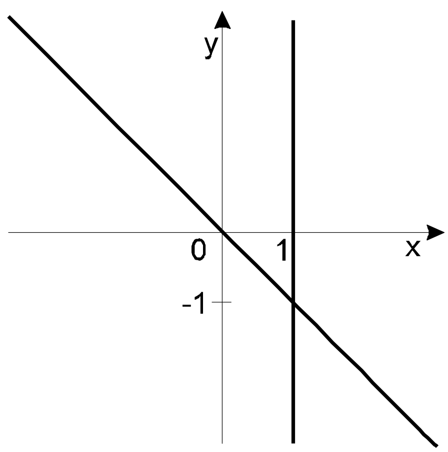
Ile wynosi suma $n$ początkowych wyrazów tego ciągu ?

**I** $3^n - 1$ **II** $2(3^n - 1)$ **III** $3^n$ **IV** $0,5 \cdot 3^{n-1}$

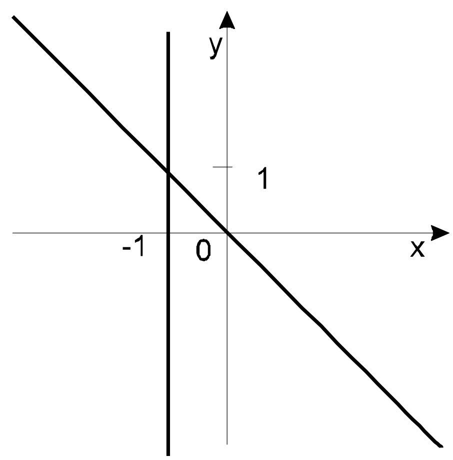
7. Który z poniższych rysunków przedstawia zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x^2 - x - xy + y = 0 \quad ?$$

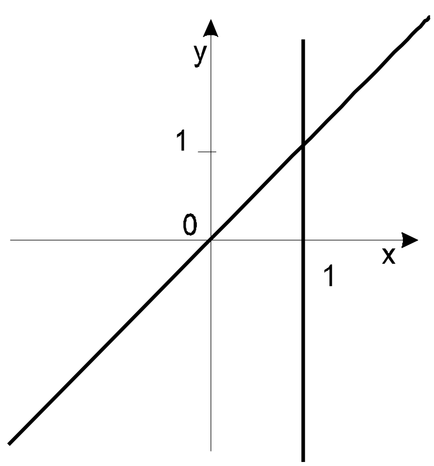
**I**



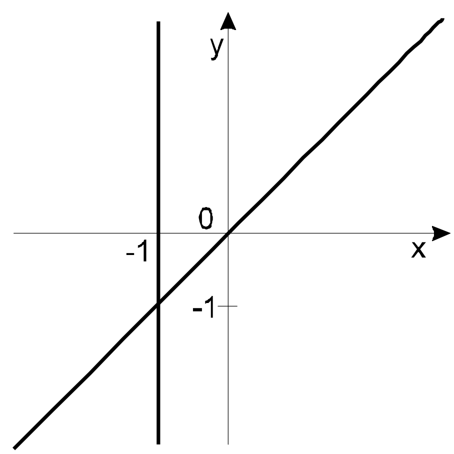

**II**




**III**




**IV**



8. Cena towaru wynosiła $p$. Cenę tę podniesiono o $8\%$, a następnie nową cenę obniżono o $10\%$.
Ile wynosi cena towaru po tych zmianach ?

**I** $p-2$ **II** $p-0{,}02$ **III** $0{,}98p$ **IV** $0{,}972p$

9. Jaką wartość ma wyrażenie

$$4^{\log_2 7} \quad ?$$

**I** 14 **II** 49 **III** 7 **IV** 128

10. Dany jest zbiór

$$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

Ile jest 6-elementowych podzbiorów tego zbioru, do których należą dokładnie dwie liczby nieparzyste ?

**I** 15 **II** 75 **III** 30 **IV** 36

11. Dla jakich $x \in (0;\, 2\pi)$ jest spełniona nierówność

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad ?$$

**I** $\left(\frac{\pi}{6}; 2\pi\right)$ **II** $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ **III** $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$ **IV** $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

12. Wykres funkcji $y = x^2 + 8x + 17$ jest obrazem wykresu funkcji $y = x^2$ w przesunięciu o wektor $\vec{w}$.

Jakie współrzędne ma wektor $\vec{w}$ ?

**I** $[-4, 1]$ **II** $[4, -1]$ **III** $[4, 1]$ **IV** $[-4, -1]$

13. Które z poniższych równań jest równaniem okręgu ?

**I** $x^2 + y^2 + 4 = 0$
**II** $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$
**III** $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 15 = 0$
**IV** $x^2 + y^2 - 2x = 0$

14. Pierwiastki równania kwadratowego

$$x^2 + px - q^2 = 0, \qquad q \neq 0$$

oznaczamy: $x_1$ i $x_2$ .

Ile wynosi $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ ?

**I** $p^2 + 2q^2$ **II** $\frac{p^2 + 2q^2}{q^2}$ **III** $p^2 + 4q^2$ **IV** $pq^2$

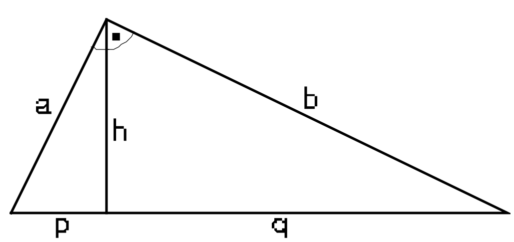
15. Zbiór $A$ ma 12 elementów, zbiór $B$ ma 9 elementów, zbiór $A \cup B$ ma 17 elementów.
Ile elementów należy do zbioru $A - B$ ?

**I** 3 **II** 5 **III** 4 **IV** 8

16. Krawędź sześcianu ma długość 1. Jaką długość ma odcinek łączący wierzchołek sześcianu ze środkiem ściany sześcianu, do której nie należy ten wierzchołek ?

**I** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **II** $\sqrt{3}$ **III** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **IV** $\sqrt{2}$

17. W trójkącie prostokątnym na poniższym rysunku




mamy dane $a = 3$ , $b = 4$. Ile wynosi $p$, $q$ i $h$ ?

**I** $p = 1{,}8$ , $q = 3{,}2$ , $h = 2{,}4$

**II** $p = 1{,}8$ , $q = 3{,}2$ , $h = 2{,}8$

**III** $p = 1{,}6$ , $q = 3{,}4$ , $h = 2{,}4$

**IV** $p = 1{,}6$ , $q = 3{,}4$ , $h = 2{,}8$

18. Zbiór $A$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 0 \ .$$

Zbiór $B$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$(x-2)(x+3) \geq 0 \ .$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

**I** $A = B$

**II** $B - A$ jest zbiorem jednoelementowym

**III** $A \cap B$ jest zbiorem jednoelementowym

**IV** $A \cap B = B$

19. Które z poniższych równań ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste ?

**I** $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$

**II** $x^4 - 4x^2 - 4 = 0$

**III** $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$

**IV** $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

20. Która z poniższych figur ma dokładnie dwie osie symetrii ?

**I** Odcinek

**II** Kwadrat

**III** Punkt

**IV** Dwie proste równoległe

## ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **x**.

| Numer pytania | Odpowiedź | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | | **x** | | |
| 2 | | | **x** | |
| 3 | **x** | | | |
| 4 | | | **x** | |
| 5 | | **x** | | |
| 6 | | **x** | | |
| 7 | | | **x** | |
| 8 | | | | **x** |
| 9 | | **x** | | |
| 10 | | **x** | | |
| 11 | | **x** | | |
| 12 | **x** | | | |
| 13 | | | | **x** |
| 14 | | | | **x** |
| 15 | | | | **x** |
| 16 | | | **x** | |
| 17 | **x** | | | |
| 18 | | **x** | | |
| 19 | | **x** | | |
| 20 | **x** | | | |

# ETAP 2 - FINAŁ

## Zadanie 1.

Wyznacz iloraz malejącego ciągu geometrycznego, jeśli suma wyrazów pierwszego, drugiego i trzeciego wynosi -7 (minus siedem), a wyraz piąty jest o 14 mniejszy od wyrazu drugiego.

## Zadanie 2.

Pole trapezu ABCD o podstawach AD i BC (AD > BC) jest równe 48.
Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych trapezu.
Pole trójkąta AOB jest równe 9.
Wyznaczyć stosunek długości AD i BC podstaw trapezu.

**TEST**

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Zakładamy, że zdarzenia $A$ i $B$ wykluczają się. Które z poniższych zdań jest wnioskiem z tego założenia ?

**I** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
**II** $P(A - B) = P(A) - P(B)$
**III** $P(A - B) = P(A)$
**IV** $P(A) \le P(B)$

2. Które z poniższych równań ma dokładnie dwa różne pierwiastki rzeczywiste ?

**I** $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$
**II** $x^4 - 4x^2 - 4 = 0$
**III** $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$
**IV** $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in R$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

**I** Dla każdego $x$, $f(x) > 0$

**II** Istnieje $x$ taki, że $f(x) = 1$

**III** Dla każdego $x < 0$, $f(x) > 0$

**IV** Dla każdego $x > 0$, $f(x) > 0$

4. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

**I** $(5 - 3\sqrt{7})^2 + (5 + 3\sqrt{7})^2$

**II** 0,7252525...

**III** $\left|1 - \sqrt{2}\right| - \sqrt{2}$

**IV** 0

5. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Jakie własności ma ta funkcja ?

**I** Funkcja jest parzysta

**II** Funkcja jest nieparzysta

**III** Funkcja jest okresowa

**IV** Funkcja jest ograniczona

6. Która z poniższych figur ma dokładnie dwie osie symetrii ?

**I** Odcinek

**II** Kwadrat

**III** Dwa różne punkty

**IV** Dwie proste równoległe

7. Które z poniższych zdań są prawdziwe ?

**I** Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

**II** Punkt, w którym przecinają się środkowe trójkąta dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1.

**III** W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe.

**IV** Kąt wpisany w okrąg ma miarę dwa razy mniejszą, niż kąt środkowy oparty na tym samym łuku.

8. Dana jest nierówność $\frac{x-2}{x+3} < 0$.

Która z poniższych nierówności jest równoważna danej nierówności ?

**I** $x-2<0$ **II** $(x-2)(x+3)<0$

**III** $x-2 \le 0$ **IV** $(x-2)(x+3) \le 0$

9. Która z poniższych funkcji spełnia warunek

$$f(x+y) \le f(x) + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in R$ ?

**I** $f(x) = 2x-1$ **II** $f(x) = 2x+1$

**III** $f(x) = |x|$ **IV** $f(x) = x^2$

10. Zbiory $A$ i $B$ są dowolnymi podzbiorami niepustego zbioru $\Omega$. Symbol $A'$ oznacza uzupełnienie zbioru $A$ do zbioru $\Omega$, czyli $A' = \Omega - A$.

Które z poniższych równości są prawdziwe ?

**I** $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **II** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**III** $(A' \cup B')' = A \cup B$ **IV** $A - B = A \cap B'$

## ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

| Numer pytania | Odpowiedź | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | | | X | |
| 2 | X | X | | |
| 3 | | X | X | |
| 4 | X | X | X | X |
| 5 | | X | | X |
| 6 | X | | X | |
| 7 | X | X | | X |
| 8 | | X | | |
| 9 | | X | X | |
| 10 | X | X | | X |

**ZADANIA Z KONKURSU 2010-2011**

# ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in<-1;2>$. Który z podanych zbiorów jest zbiorem wartości tej funkcji:

**I** $<0{,}2;\ 0{,}5>$ **II** $<0{,}2;\ \infty)$

**III** $<0{,}2;\ 1>$ **IV** $(0;\ 1>$

2. Ile przekątnych ma 20-kąt wypukły?

**I** 170 **II** 180

**III** 340 **IV** 360

3. Ile podzbiorów ma zbiór $\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$

**I** 3 **II** 4

**III** 6 **IV** 8

4. Która z poniższych liczb jest najmniejsza

**I** $0{,}02^{0{,}03}$ **II** $0{,}03^{0{,}02}$

**III** $\log_{0{,}98} 1{,}01$ **IV** $\sin 0{,}02$

5. Która z poniższych funkcji nie jest funkcją liniową

**I** $f(x)=(x-1)^2-(x+1)^2$ **II** $f(x)=\frac{x}{|x|}$

**III** $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ **IV** $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$

6. Funkcja $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x-3\right)$ jest malejąca w przedziale:

**I** $(-\infty;\ -1)$ **II** $[1;\ \infty)$

**III** $(-\infty;\ 1)$ **IV** $(3;\ \infty)$

7. Funkcja $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$:

**I** jest parzysta i nie jest nieparzysta **II** jest nieparzysta i nie jest parzysta

**III** jest parzysta i nieparzysta **IV** nie jest parzysta i nie jest nieparzysta

8. Wiadomo, że nierówność $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x} \geq k \quad (k \in R)$ ma rozwiązanie. Maksymalna wartość $k$ wynosi:

**I** $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ **II** $\sqrt{3}$

**III** $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ **IV** $\sqrt{6}$

9. Dane są dwa zbiory $A=\{a_1,.....,a_6\}$, $B=\{b_1,.....,b_3\}$, których elementami są liczby rzeczywiste. Określono odwzorowanie $f: A \to B$, takie, że każdy element zbioru *B* należy do zbioru wartości tego odwzorowania oraz $f(a_1) \leq f(a_2) \leq .... \leq f(a_6)$.

Liczba takich odwzorowań wynosi:

**I** $3^6$ **II** $6 \cdot 3$

**III** $\binom{6}{3}$ **IV** $\binom{5}{2}$

10. Niech liczby rzeczywiste $x,\ y$ spełniają równość: $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$.

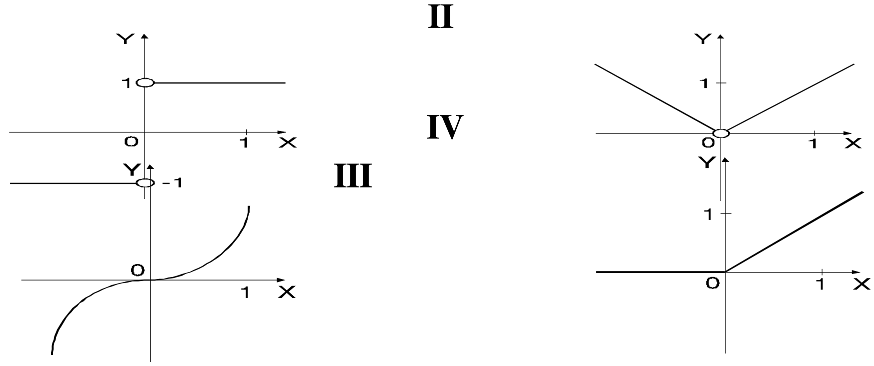
Wtedy wyrażenie $x^2+y^2$ ma najmniejszą wartość równą:

**I** 2 **II** 1 **III** $\sqrt{3}$ **IV** $\sqrt{2}$

11. Który z poniższych rysunków przedstawia wykres funkcji

$$f(x)=x|x|$$

**I** **II** **IV** **III**




12. Ile rozwiązań ma równanie $2|x-1|=x$

**I** Nie ma rozwiązań.

**II** Ma dokładnie jedno rozwiązanie.

**III** Ma nieskończenie wiele rozwiązań.

**IV** Ma dokładnie dwa rozwiązania.

13. Wykres funkcji $f(x)=2^x$ przesuwamy o wektor [1, 0], po czym otrzymaną krzywą przekształcamy przez symetrię względem osi $Ox$. Jakiej funkcji wykres otrzymamy?

**I** $g(x)=-2^{x-1}$ **II** $g(x)=2^{-x-1}$ **III** $g(x)=-2^{x}-1$ **IV** $g(x)=2^{-x}+1$

14. Który z poniższych wielomianów jest dzielnikiem wielomianu

$$W(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

**I** $P(x)=(x-1)(x-2)$ **II** $P(x)=(x-1)(x+2)$

**III** $P(x)=(x+1)(x-2)$ **IV** $P(x)=(x+1)(x+2)$

15. Dla jakiej wartości m proste $y=x+3$ i $mx-3y+6=0$ są równoległe?

**I** 1 **II** 3 **III** $-1$ **IV** $-3$

16. Która z poniższych brył ma największą objętość?

**I** Kula o promieniu 3.
**II** Walec o promieniu podstawy 2 i wysokości 8.
**III** Sześcian o przekątnej $5\sqrt{3}$.
**IV** Stożek o wysokości 11 i tworzącej $\sqrt{130}$.

17. Gdzie znajduje się środek okręgu wpisanego w trójkąt?

**I** W punkcie, w którym przecinają się środkowe boków tego trójkąta.
**II** W punkcie, w którym przecinają się symetralne boków tego trójkąta.
**III** W punkcie, w którym przecinają się wysokości tego trójkąta.
**IV** W punkcie, w którym przecinają się dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta.

18. Jaką wartość ma wyrażenie

$$\sqrt{2}^{\log_4 81}$$

**I** 2 **II** 3 **III** 4 **IV** 9

19. W ciągu $(a_n)$ wyraz $a_n$ wynosi $\frac{2n+1}{n+3}$

Ile wynosi wyraz $a_{n-1}$ dla $n>1$ ?

**I** $\frac{2n}{n+2}$ **II** $\frac{2n-1}{n+2}$

**III** $\frac{n-2}{n+3}$ **IV** $\frac{2n}{n+3}$

20. Cena towaru wynosiła *p*. Cenę tę podniesiono o 10% , a następnie nową cenę obniżono o 6% . Ile wynosi cena towaru po tych zmianach ?

**I** $p+4$ **II** $1{,}04p$ **III** $p+0{,}04$ **IV** $1{,}034p$

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **x**.

| Numer pytania | Odpowiedź | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | | | x | |
| 2 | x | | | |
| 3 | | | | x |
| 4 | | | x | |
| 5 | | x | | |
| 6 | | | | x |
| 7 | | | | x |
| 8 | | | | x |
| 9 | | | | x |
| 10 | | x | | |
| 11 | | | x | |
| 12 | | | | x |
| 13 | x | | | |
| 14 | | x | | |
| 15 | | x | | |
| 16 | | | x | |
| 17 | | | | x |
| 18 | | x | | |
| 19 | | x | | |
| 20 | | | | x |

# ETAP 2 - FINAŁ

## Część I

## Zadania

### Zadanie 1.
Środkowe trójkąta mają długości 9, 12, 15. Obliczyć pole tego trójkąta.

### Zadanie 2.
Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$

Rozwiąż równanie

$$f\big(f(f(f(f(x))))\big) = 0.$$

### Zadanie 3.
Niech $M$ i $N$ będą punktami płaszczyzny z układem współrzędnych $XOY$. Odległością punktów $M$ i $N$ nazwiemy liczbę $dist(M, N)$ określoną następująco:

$$dist(M,N) = \begin{cases} |MN| & \text{gdy punkt } O \text{ nalezy do prostej } MN \\ |MO| + |ON| & \text{gdy punkt } O \text{ nie nalezy do prostej } MN \end{cases}$$

W powyższym określeniu $O$ jest początkiem układu współrzędnych, a symbol $|MN|$ oznacza długość odcinka $\overline{MN}$.

Dane są punkty $P = (3, 0)$, $Q = (0, 1)$

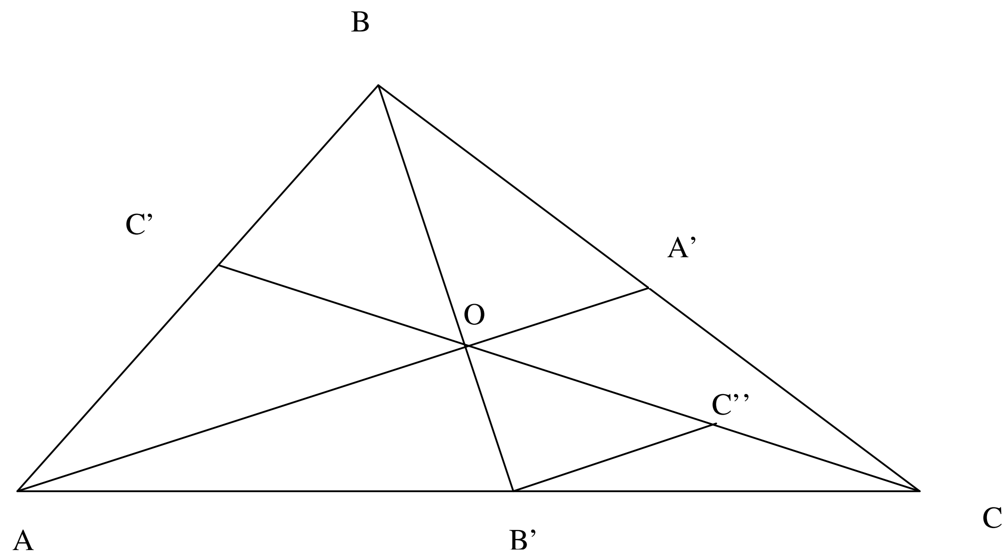
W układzie współrzędnych narysuj zbiory:

$$A = \{S : dist(P,S) = 4\}, \quad B = \{S : dist(P,S) < dist(S,Q)\}$$

Wykonaj dwa osobne rysunki.

## Rozwiązania zadań

**Zadanie 1**
Szkic rozwiązania.




|AA'| = 9
|BB'| = 12
|CC'| = 15
B'C'' ‖ AA'

Rozpatrujemy trójkąt OB'C''

$$|B'C''| = \frac{1}{2}|AO| = \frac{1}{2}\frac{2}{3}|AA'| = 3$$

$$|OB'| = \frac{1}{3}|BB'| = 4$$

$$|OC''| = \frac{1}{2}|OC| = \frac{1}{2}\frac{2}{3}|CC'| = 5$$

Skoro długości boków tego trójkąta maja długości 3, 4, 5, to **jest to trójkąt prostokątny**.
PΔOB'C'' = 6
2 PΔOB'C'' = PΔOB'C
PΔOB'C = PΔAOB'
stąd PΔAOC = 24
PΔAOB = 2 PΔAOB' = 24
PΔA'OC = PΔBOA' = 0,5 PΔAOB = 12
Zatem
PΔABC = 24 + 24 + 12 + 12 =72

Odp. Pole tego trójkąta wynosi 72.

**Zadanie 2**
Szkic rozwiązania.
Zauważmy, że

$$f(x) = (x+6)^2 - 6$$

stąd

$f(f(x)) = (x+6)^4 - 6$

$f(f(f(x))) = (x+6)^8 - 6$

itd.

$f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{32} - 6$

Wtedy rozpatrywane równanie ma postać

$$(x+6)^{32} - 6 = 0$$

Zatem rozwiązania to: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$ .

Odp. Równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = -6 - \sqrt[32]{6}$ i $x_2 = -6 + \sqrt[32]{6}$ .

**Zadanie 3**
Odpowiedź:
*A* – okrąg o środku (0, 0) i promieniu 1 bez punktu (1, 0) z dołączonym punktem (7, 0).
*B* – półprosta zawarta w osi *OX* od punktu (1, 0) w prawo, bez punktu (1, 0)

# Część II

## PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Które z poniższych przekształceń płaszczyzny ma nieskończenie wiele punktów stałych?

   **I** Przesunięcie o wektor niezerowy.

   **II** Rzut prostopadły na prostą.

   **III** Symetria środkowa.

   **IV** Obrót o kąt $\alpha$, $0 < \alpha < 2\pi$.

2. Które z poniższych równań jest równaniem okręgu?

   **I** $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$

   **II** $(x - 1)^2 + y^2 + 4 = 0$

   **III** $x^2 + y^2 - 2x = 0$

   **IV** $(x+1)^2+(y-4)^2-5=0$

3. Która z poniższych funkcji jest parzysta?

   **I** $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{gdy } |x|>1 \\ 0 & \text{gdy } |x|\le 1 \end{cases}$

   **II** $g(x) = \log|x|$

   **III** $h(x)=\begin{cases} -1-x & \text{gdy } x<0 \\ 1-x & \text{gdy } x>0 \end{cases}$

   **IV** $k(x) = |\log x|$

4. Która z poniższych funkcji ma zbiór wartości równy przedziałowi $\langle 0;1 \rangle$ ?

   **I** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x\le 0 \\ 1 & \text{gdy } x>0 \end{cases}$

   **II** $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   **III** $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

   **IV** $k(x) = \dfrac{1+\cos x}{2}$

5. Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+1}{n}$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

**I** Istnieje $n$ takie, że $a_n = 1{,}003$
**II** Dla każdego $n$ $a_n > 1{,}001$
**III** Istnieje $n$ takie, że $a_n = 1{,}002$
**IV** Istnieje $n$ takie, że $a_n < 1{,}001$

6. Punkt $P'$ jest obrazem punktu $P$ w symetrii środkowej względem punktu $O$. Która z poniższych równości jest prawdziwa?

**I** $\vec{OP} = \vec{OP'}$
**II** $\vec{PP'} = 2\vec{OP}$
**III** $\vec{OP} = -\vec{OP'}$
**IV** $\vec{PO} = \vec{P'O}$

7. Które z poniższych równań ma cztery różne pierwiastki rzeczywiste?

**I** $x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ **II** $x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

**III** $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ **IV** $x^4 - 4x^2 - 4 = 0$

8. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

**I** 1,2533333...

**II** $\left|1-\sqrt{2}\right| + \sqrt{2}$

**III** $(4-\sqrt{12})(4+2\sqrt{3})$

**IV** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$

9. Która z poniższych figur jest wypukła ?

**I** Półpłaszczyzna

**II** Okrąg

**III** Dwa różne punkty

**IV** Koło

10. Które z poniższych równości są prawdziwe dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, C ?

**I** $(A \cup B) \cap A = A$

**II** $(A - B) - C = A - (B \cap C)$

**III** $(A \cup B) \cap A = B$

**IV** $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

## ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

| Numer pytania | Odpowiedź | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | | X | | |
| 2 | X | | X | X |
| 3 | X | X | | |
| 4 | | | X | X |
| 5 | | | X | X |
| 6 | | | X | |
| 7 | X | | | |
| 8 | X | | X | X |
| 9 | X | | | X |
| 10 | X | | | X |

## ZADANIA Z KONKURSU 2011-2012

# ETAP 1

Przy każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi, z których dokładnie jedna jest prawidłowa.

1. Funkcja $f$ spełnia dla każdego $x \neq 0$ równość:

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=7$$

Ile wynosi $f(3)$ ?

**I** $\frac{1}{5}$ **II** 1 **III** 3 **IV** 5

2. Dla liczb rzeczywistych $x$, $y$ definiujemy działanie: $x \oplus y = x^4 - y$. Ile wynosi $a \oplus (a \oplus a)$?

**I** $a^8$ **II** $a^4$ **III** $a^2$ **IV** $a$

3. Wiadomo, że $\frac{x^2+1}{x}=3$. Ile wynosi $x^2+\frac{1}{x^2}$ ?

**I** 3 **II** 6 **III** 7 **IV** 9

4. Sześciokąt $A$ powstał przez połączenie odcinkami środków sąsiednich boków sześciokąta foremnego o polu 4. Pole sześciokąta $A$ jest równe

**I** 2 **II** 3 **III** $\sqrt{2}$ **IV** $\sqrt{3}$

5. Dane są punkty: $A=(\sqrt{6},\sqrt{29})$, $B=(\sqrt{7},\ 2\sqrt{7})$, $C=(\sqrt{13},5)$. Ile punktów wspólnych mają brzeg trójkąta ABC i okrąg o równaniu $x^2+y^2=36$ ?

**I** 0 **II** 1 **III** 2 **IV** 3

6. Która z poniższych funkcji jest funkcją liniową?

**I** $f(x)=|x|$ **II** $f(x)=\sqrt{x^2}$ **III** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ **IV** $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$

7. Układ równań

$$\begin{cases} 3x-3y=1 \\ 9x-6y=p \end{cases}$$

**I** dla każdej wartości $p$ nie ma rozwiązań
**II** dla każdej wartości $p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie
**III** dla każdej wartości $p$ ma nieskończenie wiele rozwiązań
**IV** dla $p=1$ jest układem sprzecznym

8. Każda liczba dodatnia podzielna przez 3, może być przedstawiona dla pewnego całkowitego i dodatniego $n$ w postaci

**I** $3n-3$ **II** $3n+3$ **III** $n^3+3$ **IV** $n^3-3$

9. Zbiorem rozwiązań nierówności

$$\sqrt{2+x-x^2} > x-2$$

jest

**I** przedział $[-1;4)$

**II** zbiór $[-1;2)\cup(4;\infty)$

**III** przedział $[-1;2)$

**IV** przedział $(4;\infty)$

10. W sześcioosobowej grupie dzieci o różnych imionach, są cztery dziewczynki i dwóch chłopców. Dzieci te losowo dzielimy na dwie grupy po trzy osoby. Prawdopodobieństwo, że w każdej trójce jest jeden chłopiec jest równe

**I** $\frac{1}{2}$ **II** $\frac{1}{3}$ **III** $\frac{2}{3}$ **IV** $\frac{3}{5}$

11. W wielokącie foremnym W losujemy dwa spośród jego wierzchołków.

Prawdopodobieństwo tego, że łączący je odcinek nie jest bokiem wielokąta W wynosi $\frac{2}{3}$.

Stąd wynika, że

**I** W jest kwadratem

**II** W jest sześciokątem

**III** W jest siedmiokątem

**IV** W jest ośmiokątem

12. Na płaszczyźnie dany jest szesnastokąt foremny. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty prostokątne, których wierzchołki są wybrane spośród wierzchołków tego szesnastokąta. Trójkątów takich jest

**I** 96 **II** 112 **III** 144 **IV** 72

13. Zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \le 0$$

jest

**I** przedziałem $(-\infty;1]$

**II** przedziałem $[3;\infty)$

**III** przedziałem $[1;3]$

**IV** zbiorem $[-\infty;1]\cup[3;\infty)$

14. Sześcian o przekątnej $d$ ma takie samo pole powierzchni całkowitej, jak kula o promieniu $\sqrt{3}$. Ile wynosi $d$ ?

**I** $\sqrt{6\pi}$ **II** $\sqrt{8\pi}$ **III** $\sqrt{4\pi}$ **IV** $\sqrt{\pi}$

15. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość 1, a krawędź boczna prostopadłościanu ma długość 2. Jaką długość ma najdłuższy odcinek łączący wierzchołek prostopadłościanu ze środkiem krawędzi podstawy prostopadłościanu ?

**I** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **II** $\sqrt{3}$ **III** $\frac{\sqrt{21}}{2}$ **IV** $\frac{3}{2}$

16. Zbiór $A$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \ .$$

Zbiór $B$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$(x-1)(x+2) > 0 \ .$$

Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

**I** $A - B$ jest zbiorem pustym

**II** $B - A$ jest zbiorem pustym

**III** $A \cup B = B$

**IV** $A \cap B = A$

17. Dane są dwa koła

$$K_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\} \quad K_2 = \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 25\}$$

Jakie jest wzajemne położenie tych kół ?

**I** Koła są rozłączne

**II** Koło $K_1$ jest podzbiorem koła $K_2$

**III** Koło $K_2$ jest podzbiorem koła $K_1$

**IV** Koła mają dokładnie jeden punkt wspólny

18. Dla jakich wartości $m$ równanie $2^{2x} - m \cdot 2^x + 1 = 0$ ma dwa pierwiastki ?

**I** $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ **II** $m \in (-\infty; -2)$

**III** $m \in (2; \infty)$ **IV** $m \in (-2; 2)$

19. W jakim stosunku zmieszać roztwór cukru o stężeniu 2 % z roztworem cukru o stężeniu 5 %, aby otrzymać roztwór cukru o stężeniu 4 % ?

**I** 3 : 2 **II** 2 : 3 **III** 2 : 1 **IV** 1 : 2

20. Dla jakiej wartości $x$ z przedziału $<0; 2\pi>$ spełniony jest układ warunków

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

**I** $\frac{11\pi}{6}$ **II** $\frac{7\pi}{6}$ **III** $\frac{4\pi}{3}$ **IV** $\frac{5\pi}{3}$

## ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

| Numer pytania | Odpowiedź | | | | Zaliczono punktów |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| 1 | | | | X | |
| 2 | | | | X | |
| 3 | | | X | | |
| 4 | | X | | | |
| 5 | | | X | | |
| 6 | | | | X | |
| 7 | | X | | | |
| 8 | X | | | | |
| 9 | | | X | | |
| 10 | | | | X | |
| 11 | | | X | | |
| 12 | | X | | | |
| 13 | | | X | | |
| 14 | X | | | | |
| 15 | | | X | | |
| 16 | | X | | | |
| 17 | | X | | | |
| 18 | | | X | | |
| 19 | | | | X | |
| 20 | X | | | | |

# ETAP 2 - FINAŁ

## Część I

## Zadania

### Zadanie 1.

W trapezie ABCD o podstawach AD i BC punkt O jest punktem przecięcia przekątnych. Dane są pola trójkątów $P_1 = P\Delta AOD$ i $P_2 = P\Delta BOC$.
Wyznaczyć pole trapezu.

### Zadanie 2.

Liczby $a, b, c, d$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego rosnącego i są pierwiastkami równania

$$x^4 - 5x^2 + q = 0.$$

Wyznacz $q$.

### Zadanie 3.

Symbol $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą liczbie $x$. Narysuj wykresy funkcji:

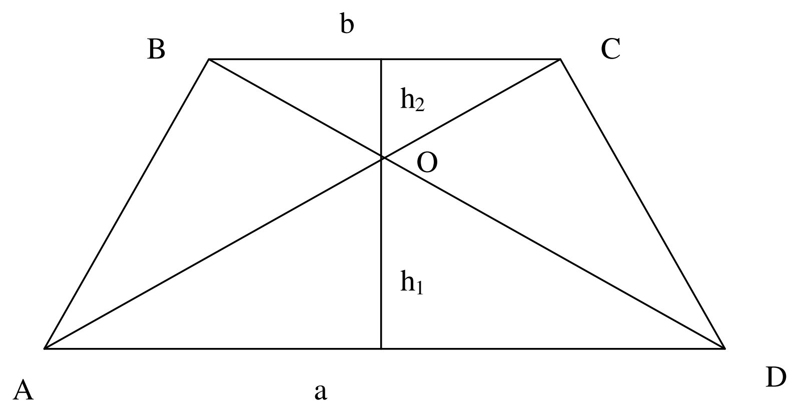
a) $f(x) = E(|x|)$ dla $x \in <-2; 2>$

b) $g(x) = x \cdot E(x)$ dla $x \in <-1; 2>$

## Rozwiązania zadań

**Zadanie 1**

Szkic rozwiązania.




Niech:

|AD| = a, |BC| = b

$h_1$ – wysokość trójkąta BOC opuszczona na BC,

$h_2$ – wysokość trójkąta AOD opuszczona na AD,

$h = h_1 + h_2$ – wysokość trapezu ABCD

Zatem $P_1 = P\Delta AOD = \frac{1}{2}ah_1$; $P_2 = P\Delta BOC = \frac{1}{2}bh_2$;

Pole trapezu jest równe

$$P = \frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1 + \frac{1}{2}bh_2 = P_1 + P_2 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}bh_1$$

Trójkąt AOD jest podobny do trójkąta BOC, zatem

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$$

Stąd: $h_1 = \frac{h_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$, $a = \frac{b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}$. Zatem:

$$P = P_1 + P_2 + \frac{1}{2}\frac{b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}}h_2 + \frac{1}{2}b\frac{h_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}} = P_1 + P_2 + \frac{P_2\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_2}} = P_1 + P_2 + \sqrt{P_1P_2} = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$$

**Zadanie 2**

Szkic rozwiązania.

Oznaczmy: $x^2 = t$. Z warunków zadania wynika, że równanie $t^2 - 5t + q = 0$ ma dwa pierwiastki dodatnie $t_1$, $t_2$ takie, że

$$\begin{cases} b^2 = c^2 = t_1 \\ a^2 = d^2 = t_2 \end{cases}$$

przy czym *b* jest liczbą przeciwną do *c*, zaś *a* jest liczbą przeciwną do *d*.

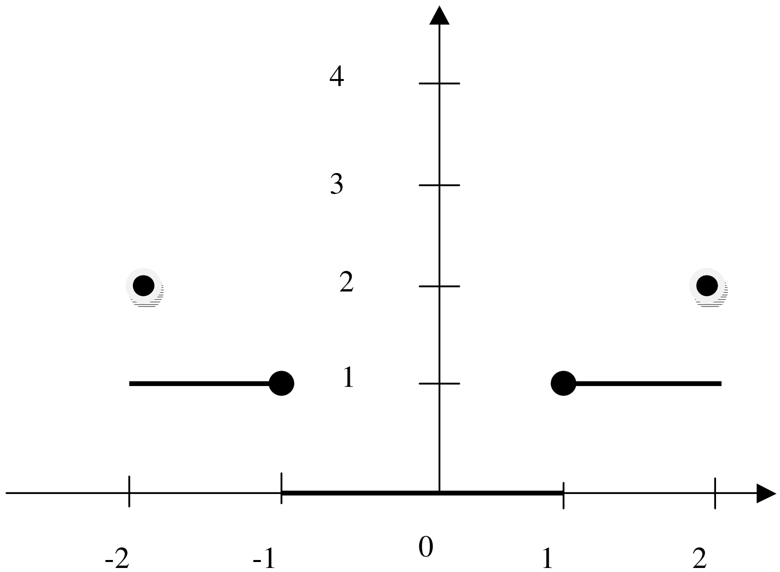
Ponieważ $d - c = c - b$ i $b = -c$ więc $d = 3c$. Zatem $t_2 = 9t_1$.

Ze wzorów Viete'a mamy:

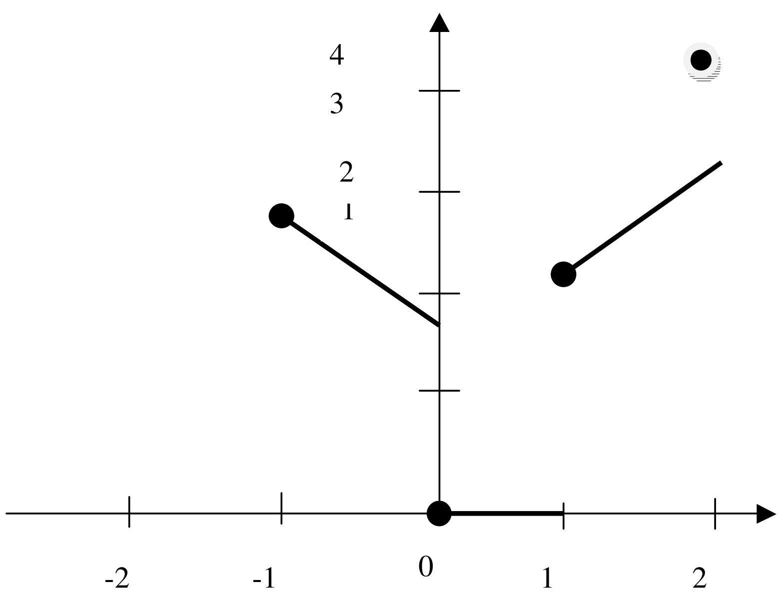
$$t_1t_2 = q$$
$$t_1 + t_2 = 5$$

Rozwiązując układ trzech ostatnich równań otrzymamy odpowiedź: $q = 9/4$.

**Zadanie 3**
Szkic rozwiązania.
a)




b)



# Część II

## PYTANIA TESTOWE

Po każdym pytaniu są podane 4 odpowiedzi oznaczone cyframi rzymskimi I, II, III i IV. Z tych odpowiedzi jedna, dwie, trzy lub cztery są prawdziwe.

1. Przekrój czworościanu foremnego płaszczyzną może być:

**I** trójkątem równobocznym
**II** trójkątem o każdym boku różnej długości
**III** kwadratem
**IV** pięciokątem

2. Niech $p$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian $x^2 - px + p$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Pierwiastek ten

**I** jest ujemny
**II** jest wymierny
**III** jest liczbą całkowitą parzystą
**IV** może być liczbą pierwszą.

3. Wielomian $x^2 + ax + b$ ma ten sam niepusty zbiór pierwiastków, co wielomian $ax + b$. Warunek ten

**I** oznacza, że zbiorem pierwiastków jest zbiór $\{0\}$
**II** jest spełniony, gdy $b = 0$
**III** nigdy nie jest spełniony
**IV** jest spełniony, gdy $a = 0$.

4. Które z poniższych równań nie ma pierwiastków rzeczywistych ?

**I** $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$
**II** $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$
**III** $x^4 + 3x^2 + 5 = 0$
**IV** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

5. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 9$
Które z poniższych zdań jest prawdziwe ?

**I** Dla każdego $x < 0$, $f(x) > 0$
**II** Dla każdego $x$, $f(x) > 0$
**III** Istnieje $x < 0$ taki, że $f(x) = 0$
**IV** Istnieje $x$ taki, że $f(x) = 0$

6. Która z poniższych liczb jest liczbą wymierną ?

**I** $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

**II** 0,6343434...

**III** $(4-\sqrt{20})(4+2\sqrt{5})$

**IV** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3}$

7. Która z poniższych figur ma środek symetrii ?

**I** Półprosta
**II** Dwa różne punkty
**III** Trzy różne punkty niewspółliniowe
**IV** Dwie proste równoległe

8. Dane są wzory na n-ty wyraz ciągu ($n \in N_+$) :

**I** $a_n = \log 2^n$ **II** $b_n = \log^n 2$

**III** $c_n = \log 2^{(2n)}$ **IV** $d_n = \log 2^{(2^n)}$

Który z tych ciągów jest ciągiem geometrycznym?

9. Który z poniższych zbiorów jest jednoelementowy?

**I** $\{a, \varnothing\}$ **II** $\{a, a\}$
**III** $\{\{a\}\}$ **IV** $\{\varnothing\}$

10. Który z poniższych ułamków ma rozwinięcie dziesiętne skończone?

**I** $\dfrac{1}{15^{100}}$ **II** $\dfrac{1}{16^{100}}$

**III** $\dfrac{1}{20^{100}}$ **IV** $\dfrac{1}{75^{100}}$

## ODPOWIEDZI

Prawidłowe odpowiedzi zaznaczono znakiem **X**.

| Numer pytania | Odpowiedź | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | X | X | X | |
| 2 | | X | X | X |
| 3 | | | X | |
| 4 | X | | X | X |
| 5 | X | | | X |
| 6 | X | X | X | X |
| 7 | | X | | X |
| 8 | | X | | X |
| 9 | | X | X | X |
| 10 | | X | X | |